

Die spezifische Dichte als elementare Eigenschaft von kompakten Körpern

[VAD_Physik_Dichte.docx]



Klassenstufe	Oberthemen	Unterthemen	Anforderungs-niveau	Durchführungs-niveau	Vorlauf Vorbereitung Durchführung
SI	Struktur und Materie	Dichte	●●●	■ ■ ■	50 min

Autor: Prof. Dr. Klaus Dräger

Allgemeine Einführung

In der Umgangssprache gibt es Begriffe, die dort, wo man sie nach Herkommen anwendet, auch die Verhältnisse zutreffend beschreiben. So ist z. B. ein Teelöffel „leicht“ und ein Holzklötz ist „schwer“. In diesem Vergleich erweist sich die sichtbare Menge eines Stoffes, dargestellt durch sein Volumen, als die entscheidende Größe. Das ist keineswegs immer so.

Denn bei einem großen Würfel aus Styropor und bei einem deutlich kleineren Würfel aus Stahl zeigt sich sehr schnell, dass der kleine Stahlwürfel in Wahrheit „sehr schwer“ und der größere Styropor-Würfel dagegen „federleicht“ sein kann.

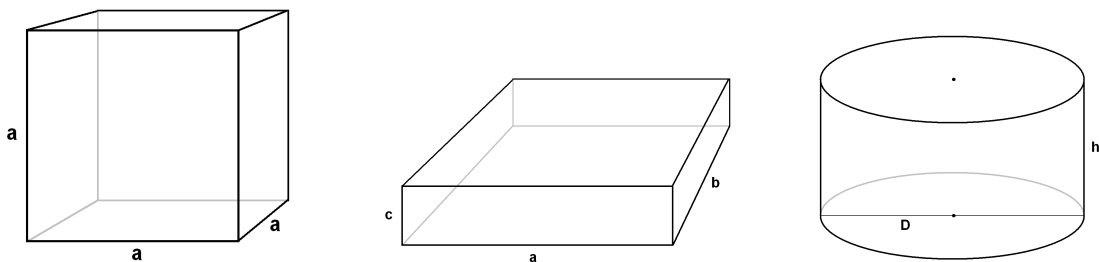
Daher ist bei jedem neuen Phänomen, das uns begegnet, auch zu prüfen, ob die üblichen, im Alltag verwendeten Begriffe ausreichen, um einen möglicherweise mehrschichtigen Sachverhalt auch unter

geänderten, äußeren Bedingungen noch zu erfassen. Es kann sogar sein, dass neue Begriffe gefunden werden müssen, um den zur Diskussion stehenden Sachverhalt widerspruchsfrei zu deuten und zu beschreiben. Für die hier angesprochenen Beispiele etwa muss man die Begriffe „spezifisches“ Gewicht und „spezifische“ Masse zunächst neu erfinden, weil diese Merkmale sehr wichtig sind. Denn sie werden durch den optischen Eindruck, auf den wir uns zunächst verlassen, überhaupt nicht erfasst.

Experimentelle Rahmenbedingungen

Wenn man sich mit den Eigenschaften der Materie etwas näher beschäftigt, dann wird bald klar, dass eine experimentelle Untersuchung verlässlich nur unter einschränkenden Bedingungen durchgeführt werden kann. Diese Einschränkungen beziehen sich auf :

1. Die Homogenität.
Es sollte sichergestellt sein, dass die untersuchte Materie nur von einer Art und in sich homogen ist. Salz und Zucker sind danach zweierlei und zwar auch bei Fragen, für die nur das Gewicht eine Rolle spielt.
2. Die Formgebung.
Da jedes Experiment immer auch eine Frage an die Natur stellt und einen Schritt ins Unbekannt bedeutet, sollte die Form der verwendeten Körper von besonders einfacher Geometrie sein. Denn so kann man neue Sachverhalte, die sich zunächst nur ungefähr andeuten, besser von den schon bekannten abtrennen. Für raumerfüllende Körper und für Fragen zum Gewicht empfiehlt es sich, die Geometrie aus den folgenden Beispielen vorzugeben :



3. Die Gewichterfassung
Um das Gewicht eines Körpers zu erfassen, benötigt man zu allererst eine Waage. Am besten eine mit digitaler Anzeige, so dass keine unnötigen Ableseprobleme zu diskutieren sind. Wenn dann die Waage wirklich auch das Gewicht anzeigt, dann müssen die erscheinenden Ziffern mit der Einheit [N] = [Newton] verbunden werden. Sie stehen als Abkürzung für :

$$[N] = [kg \cdot m/s^2]$$

Das ist zunächst überraschend, weil im Regelfall die Waagen **nicht** das Gewicht G anzeigen sondern die Masse m und zwar in [kg] oder auch in [g] , je nachdem für welchen Bereich sie empfindlich ausgelegt sind. Um keine Verwirrung während des Experimentes zu erzeugen, ist anzuraten, die Massenanzeige in [g] vorzuziehen.

Die Relation von Gewicht und Masse

In der Physik muss man gelegentlich in extreme Bereiche einsteigen, um einen bestimmten Effekt zu isolieren. Beim Gewicht oder der Masse kommt man jedoch ohne die Extreme aus. Denn solange die Waage in einem Physikraum oder auch beim Schlachter aufgebaut und eingerichtet worden ist, ergeben sich keine Messprobleme. Sollte aber jemand die Neigung verspüren, mit der Waage auf

einer Himmelsleiter hoch und immer höher zu steigen, so würde er bei einer Anzeige nach „Gewicht“ feststellen, dass das Gewicht eines auf der Waage abgelegten Körpers allmählich abnimmt und schließlich bei null landet. Dann steht dieser Mensch vor der Frage : wo ist das Gewicht geblieben? Es war doch soeben noch eine konstante und also auch eine verlässliche Eigenschaft des Körpers ! Die Antwort lautet : die Vermutung ist richtig, solange man sich auf der Erde und dort in Meereshöhe aufhält. In allen anderen Fällen ist auf nichts mehr Verlass ! Soviel zu einer Geräteanzeige, die das Gewicht liefern soll.

Weist jedoch die fragliche Waage eine Anzeige in Masseneinheiten, also in [kg] aus, so wird auch dieser Wert beim Aufstieg langsam abnehmen und schließlich bei null enden. Jetzt lautet die verblüffte Frage : hat der in die Höhe getragene Körper seine Masse eingebüßt ? Die Antwort lautet : nein, ganz und gar nicht. Sie hat sogar weiterhin den gleichen Wert wie auf Meereshöhe. Allerdings ist eine Waage in höheren Lagen denkbar ungeeignet, die Masse eines Körpers zu erfassen. Die abgelesenen Werte sind einfach falsch. – Dies als Fazit zur zweiten Anzeige !

Da aber kein Lehrer am oberen Ende der Himmelsleiter unterrichtet und dort auch kein Schlachter seine Würstchen verkauft, gibt es im normalen Alltag keinen Grund, diesen Regelbruch mit besonderem Eifer zu verfolgen. In Meereshöhe hat alles seine Ordnung !

So kann man sich zur ebenen Erde – und dies bei hoher Genauigkeit – auch darauf verlassen, dass die Masse m eines Körpers und sein Gewicht G streng aufeinander proportional bezogen sind. Ohne Ausnahme gilt hier :

$$G = m \cdot g \quad (1)$$

In dieser Gleichung erfasst die Größe g die in Meereshöhe wirksame Erdanziehung. Sie ist durch Messungen zu

$$g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

ermittelt worden und gehört für alle Zeit zum gesicherten Wissen über die uns umgebende, materielle Welt. Auf dem Mond, dies sei am Rande vermerkt, müsste man sich allerdings umstellen und lernen, mit dem dortigen Wert $g(\text{Mond}) = 1,63 \text{ [m/s}^2\text{]}$ zu leben. Es wäre eine gewaltige Umstellung. Man hätte ständig Mühe, beim einfachen Gehen nicht in die Höhe geschleudert zu werden.

Die spezifischen Größen

In den vorangehenden Abschnitten sind für die physikalischen Größen Volumen, Masse und Gewicht zunächst die Wege zu ihrer Bestimmung beschrieben worden. Nochmals zur Erinnerung : bezogen auf Meereshöhe ! Nunmehr sollen die bereits erwähnten „spezifischen“ Größen etwas genauer betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass sie den Anwendungsbereich deutlich erweitern werden. So wird es mit ihrer Hilfe möglich, zwischen jeweils zwei Körpern einen Vergleich herbeizuführen, der darüber entscheidet, welcher von ihnen als schwer und welcher als leichter zu gelten hat.

Zunächst aber muss dazu aus dem homogenen Stoff X ein kompakter Körper mit einer einfachen Geometrie geformt werden. Danach sind seine Längenparameter auszumessen, mit denen das Volumen V errechnet werden kann. Es schließt sich dann die direkte Wägung der zugehörigen Masse $m(X)$ an. Mit diesen Aktionen sind alle Voraussetzungen gegeben, um auch die spezifischen Größen festzulegen. Dazu erzeugt man mit Gleichung g (1), die die Verknüpfung von Gewicht und Masse beschreibt, die neue Gleichung :

$$\frac{G(X)}{V} = \frac{m(X)}{V} \cdot g \quad (2)$$

wobei unter V das Volumen dieses Körpers verstanden wird. Den Quotienten auf der linken Seite nennt man das spezifische Gewicht, den Quotienten auf der rechten Seite in der Form :

$$\rho(X) = \frac{m(X)}{V} \quad (3)$$

erklärt man zur spezifischen Masse bzw. zur materiellen Dichte. Für kompakte Körper werden diese Werte für konstant erachtet und in Tabellenwerken aufgelistet. Viele Messreihen sind erstellt worden, um zu zeigen, dass Wiederholungsmessungen an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten die gleichen Werte liefern.

Da diese Bewertung sich nur durch ein Experiment erneut bestätigen lässt, soll dem Postulat von der Konstanz der Dichte $\rho(X)$ ein erster, eigener Versuch gewidmet werden.

Versuch I

Die Konstanz der materiellen Dichte

Für die Untersuchung sind zwei Aluminium-Körper vorgesehen. Der eine – ein Quader mit den Abmessungen a , b und c . Der zweite ein Zylinder mit dem Durchmesser D und der Höhe h . Auch hier legen die Parameter das Volumen fest. Alle Längen sind in der Einheit [cm] zu erfassen und in die vorgegebene **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** einzutragen. Das „Gewicht“ beider Körper, welches eigentlich eine Masse ist, wird mit einer digitalen Kompaktwage in der Einheit [g] ermittelt und mit dieser Einheit dort auch eingetragen. Für die Dichte von reinem Aluminium $\rho(\text{Al})$ wird in der Literatur bei einer Temperatur von 20 °C der Wert $\rho = 2,78\text{ [g/cm}^3\text{]}$ angegeben. Da die vorhandenen Körper aus technischem Material gefertigt worden sind, das bestimmte Eigenschaften besitzen soll, kann die eigene Messung diesen Wert nicht vollständig treffen. Das zur Beachtung!

Zum anderen aber gibt es immer auch Abweichungen, selbst dann, wenn man sie vermeiden möchte. Daher soll bei den Längenmessungen vorsorglich ein Fehler von $\Delta D = \Delta h = 0,03\text{ cm}$ und bei den „Gewichtsmessungen“ ein solcher von $\Delta m = 0,1\text{ g}$ eingeplant werden. Dann kann man bereits zu einer ersten Abschätzung des Fehlers gelangen, mit dem die Dichte $\rho(\text{Al})$ belastet ist. Diese Abschätzung wird auf den Zylinder bezogen.

Dazu ersetzt man die in der Tabelle eingetragenen Längen durch $h' = h - \Delta h$ bzw. durch $D' = D - \Delta D$ während bei den Massen eine gegenläufige Variation durch $m' = m + \Delta m$ unterstellt wird. Mit diesen neuen Daten lässt sich gemäß :

$$\rho_+ = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{m'}{(D')^2 \cdot h'} \quad (4)$$

dann ein oberer Wert für die erwartete Dichte ermitteln. Die Differenz gemäß :

$$\Delta\rho = \rho_+ - \rho(Z)$$

ist ein erster Hinweis auf den Fehler, mit dem eine solche Messung für die Dichte ρ belastet ist. Zur Erinnerung : es geht um den Nachweis, dass weder die Geometrie – hier festgelegt durch Zylinder- oder Quaderform – noch die eingesetzte Masse einen Einfluss auf den Betrag der materiellen Dichte haben.

Unsere Prüfung dazu läuft nach folgendem Verfahren ab : als Bezugspunkt legen wir die materielle Dichte $\rho(Z)$ fest, die am Zylinder ermittelt worden ist, und breiten um diesen Wert als Zentrum mit der Größe $\Delta\rho$ ein ganzes Intervall aus. So erhält man :

$$[\rho(Z) - \Delta\rho, \rho(Z) + \Delta\rho]$$

Wenn dann die am Quader gemessene Dichte $\rho(Q)$ noch in diesem Intervall liegt, dann wollen wir im Rahmen unserer Messung erklären, dass die materielle Dichte ρ unabhängig ist von der vorgegebenen Geometrie und der Masse des untersuchten Körpers.

Nachdem wir in dieser Frage zu einer Entscheidung gekommen sind, können wir in der Folge für **verschiedene** Materialien auch eine **einheitliche** Geometrie und die **gleiche** Größe bei den Messkörpern vorgeben. Das Messergebnis selbst wird durch diese Vorgaben **nicht** beeinflusst. Eine solche Vorgabe vereinfacht die Messaufgabe ganz erheblich. Im folgenden Experiment werden wir von diesem Vorteil Gebrauch machen und einen Überblick über die Dichten verschiedener, gut bekannter Materialien erhalten.

Versuch II

Die Dichte verschiedener, homogener Stoffe

Für das angekündigte Experiment stehen mehrere Zylinder mit nahezu gleichen Abmessungen zur Verfügung. Sie sind aus den homogenen Stoffen : Kunststoff, Aluminium, Stahl und Messing sowie aus Holz gefertigt worden. Holz erweist sich als Sonderfall !

Für die Aufstellung der Messdaten nach Länge und Masse ist Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden. vorgesehen. Dabei sollten die Längen, falls möglich, durch eine Schieblehre mit digitaler Anzeige aufgenommen werden, um so den Messvorgang zu vereinheitlichen und zu verkürzen. Für die Wägung sollte, wie zuvor, die Kompaktwaaage eingesetzt werden. Nach Eintrag aller Messdaten ist in die Auswertung einzutreten. An Hand der so ermittelten, spezifischen Dichten ist dann eine Einschätzung vorzunehmen, ob die gefundenen Werte eine markante Eigenschaft der untersuchten Stoffe darstellen und ob sie geeignet sind, diese ganz wesentlich zu charakterisieren.

- Lassen sich Stahl und Messing – allein durch ihre Dichten ρ – sicher voneinander unterscheiden ?
- Wo liegt der Wert für die Dichte des Edelmetalls Gold ?
- Warum ist Holz ein Sonderfall ?

Ausblick

Die spezifische Dichte als zentrale Größe in unterschiedlichen Feldern

Beispiel A

Um bei zwei Körpern – verschieden groß und hergestellt aus den Stoffen X_1 und X_2 – einen Vergleich hinsichtlich ihres Gewichtes G anstellen zu können, muss man im Regelfall beide wiegen, um dann z. B. festzustellen :

$$G(X_1) < G(X_2) ,$$

d. h. der erste Körper ist der leichtere. Welche Bedingungen sind dann mit dieser Aussage verbunden?

Dazu kehren wir zurück zur Gleichung g (1) und wenden sie auf beiden Seiten an. Es folgt :

$$g \cdot m(X_1) < g \cdot m(X_2)$$

Hat der erste Körper dann das Volumen V_1 und der zweite das Volumen V_2 , so folgt mit den spezifischen Dichten nach Gleichung (3) :

$$\rho(X_1) \cdot V_1 < \rho(X_2) \cdot V_2$$

Gegenüber dem sichtbaren Vergleich, der nur die Volumina erfasst, zeigt sich hier, dass der erste Körper nur dann leichter ist, wenn gemäß :

$$V_1 < \left[\frac{\rho(X_2)}{\rho(X_1)} \right] \cdot V_2$$

der Volumenvergleich durch den Quotienten der spezifischen Dichten korrigiert wird. Diese Relation ist immer erfüllt, wenn $V_1 < V_2$ und gleichzeitig $\rho(X_1) < \rho(X_2)$ angetroffen wird. In diesen Fällen reicht

der Augenschein für eine zutreffende Bewertung des Gewichtes. Falls aber nach dem Augenschein $V_1 > V_2$ ausfällt, dann kann die Gewichtsrelation nur dann richtig getroffen werden, wenn der Quotient der Dichten mit $[\rho(X_2) / \rho(X_1)] > 1$ in die Wertung mit einbezogen wird. Mit dieser Problematik hatten wir eingangs unsere Untersuchung eröffnet.

Beispiel B

Unter den zylindrischen Körpern, die hier untersucht worden sind, befindet sich auch eine Probe aus Messing, gut erkennbar an ihrem warmen Farbton. Dazu sollte man wissen, dass Messing ein Mischkristall ist, der sich aus den reinen Komponenten Kupfer und Zink zusammensetzt. Im vorliegenden Fall sind die Anteile nicht bekannt. Aber wir wollen dennoch danach fragen. Bekannt aber sind die spezifischen Dichten der Ausgangsstoffe. Das Handbuch für Chemiker und Physiker (D'Ans Lax) weist für sie aus :

$$\begin{aligned} \text{Kupfer : } \rho(\text{Cu}) &= 8,96 \text{ [g/cm}^3\text{]} = \rho_1 \\ \text{Zink : } \rho(\text{Zn}) &= 7,13 \text{ [g/cm}^3\text{]} = \rho_2 \end{aligned}$$

Dann ermöglichen die Daten der reinen Stoffe und der gemessene Wert $\rho(\text{Me})$ des Messings einen Rückschluss auf die Zusammensetzung dieser Probe. Sie kann durch die Gewichtsanteile zunächst von Kupfer und dann von Zink gemäß :

$$x_1 (\text{Cu}) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad x_2 (\text{Zn}) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

systematisch erfasst werden. Dem späteren Ergebnis liegen die folgenden Bedingungen zugrunde :

- 1.) $M = m_1 + m_2$,
- 2.) $V = V_1 + V_2$,
- 3.) $m_1 = \rho_1 \cdot V_1$ $m_2 = \rho_2 \cdot V_2$

Mit diesen Bedingungen ergibt sich die spezifische Dichte des Mischkristalls zu :

$$\rho(\text{Me}) = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \cdot x_2}$$

Es handelt sich im Hinblick auf die Variable x_2 um eine nur schwach gekrümmte Hyperbel. Für $x_2 = 0$ d. h. im Fall von reinem Kupfer, erhält man $\rho(\text{Me}) = \rho_1 = (\text{Cu})$. Das System entspricht damit der Erwartung.

Für $x_2 = 1$ d. h. im Fall von reinem Zink, erhält man $\rho(\text{Me}) = \rho_2 = (\text{Zn})$. Auch hier trifft das Ergebnis die Erwartung. Damit kann die Formel von ihren Grenzen her gesehen, als sehr plausibel gewertet werden. In einer beiliegenden Graphik ist die spezifische Dichte $\rho(\text{Me})$ des Messings gegen den Gewichtsanteil x_2 des zugefügten Zinks aufgetragen. Um für den aktuellen Messwert der spezifischen Dichte nun auch die noch unbekannte Zusammensetzung des Messings zu ermitteln, hat man eine Parallele im Abstand $\rho(\text{Me})$ über der Abszisse nur eine Parallele einzutragen. Ihr Schnittpunkt mit der abfallenden Kurve liefert dann den gesuchten Massenanteil x_2 des Zinks in dem fraglichen Messingzylinder.

Geräte- und Materialliste

Versuch I

- Aluminium-Zylinder mit $\varnothing = 2,00 \text{ cm}$, $h = 3,00 \text{ cm}$
- Aluminium-Quader $a = 4,00 \text{ cm}$, $b = 4,00 \text{ cm}$, $c = 1,00 \text{ cm}$
- Kompaktwaage mit digitaler Anzeige, $m < 200 \text{ g}$ (maximal), $\Delta m = 0,1 \text{ g}$
- Schieblehre mit $\Delta l = 0,01 \text{ cm}$

Versuch II

- Zylinder aus verschiedenen Materialien mit $\varnothing = 2,00 \text{ cm}$, $h = 3,00 \text{ cm}$
Kunststoff, Aluminium, Stahl, Messing, Holz
- Kompaktwaage mit digitaler Anzeige, $m < 200 \text{ g}$ (maximal), $\Delta m = 0,1 \text{ g}$
- Schieblehre mit $\Delta l = 0,01 \text{ cm}$

Tabelle 1

Dichtebestimmung von Aluminium an Körpers unterschiedlicher Geometrie	
Quader	Zylinder
$a =$ <i>[cm]</i> $b =$ <i>[cm]</i> $c =$ <i>[cm]</i>	$D =$ <i>[cm]</i> $h =$ <i>[cm]</i>
$V =$ <i>[cm³]</i>	$V =$ <i>[cm³]</i>
$m =$ <i>[g]</i>	$m =$ <i>[g]</i>
$\rho (Q) =$ <i>[g / cm³]</i>	$\rho (Z) =$ <i>[g / cm³]</i>

Tabelle 2

Auswertung zur Dichtemessung an zylindrischen Proben

Stoff	Durchmesser	Höhe	Volumen	Masse	Massendichte
	$D [cm]$	$h [cm]$	$V [cm^3]$	$m [g]$	$\rho [g/cm^3]$
<i>Holz</i>					
<i>Kunststoff</i>					
<i>Aluminium</i>					
<i>Stahl</i>					
<i>Messing</i>					

