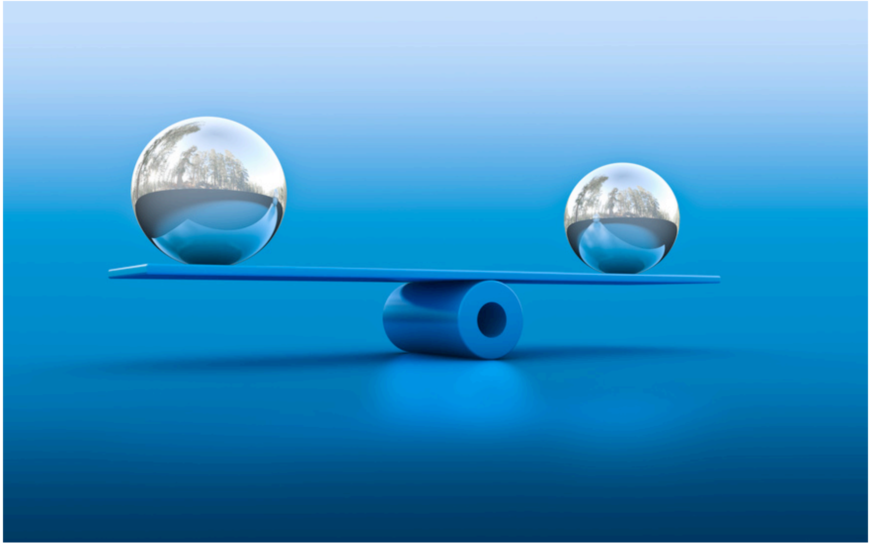
Das Gleichgewicht an einem flachen, rechtwinklig geformten Körper



Klassenstufe	Oberthemen	Unterthemen	Anforderungs-niveau	Durchführungs-niveau	Vorlauf Vorbereitung Durchführung
SI	Mechanik	Kräfte	●●	■■	50 min

Autor: Prof. Dr. Klaus Dräger

Einleitung

Bei einer Scheibe – kreisrund und flach – sieht niemand ein Problem, sie ins Gleichgewicht zu bringen. Und auch bei einem Apfel kann man sich, wenn auch mit etwas Mühe, gerade noch vorstellen, dass es einen Punkt gibt, wo er im Gleichgewicht zu halten ist. Aber bei einer Birne wird es für solche Überlegungen endgültig schwierig, weil sich die Unregelmäßigkeiten in allen Richtungen aneinander reihen. Um also etwas Elementares und Handfestes über die Regeln zu erfahren, nach denen sich ein Gleichgewicht einstellt, ist es besser von den Dingen des Alltags zunächst abzusehen und sich zu den einfach gebauten Körpern zuzuwenden und diese zu untersuchen. Die Ergebnisse werden sich als überraschend einfach herausstellen.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Die elementaren Eigenschaften eines Rechtecks

Das aus einer dünnen, ebenen Platte beschnittene Rechteck hat markante, äußere Merkmale, die sich für die Suche nach einem Punkt, der dieses Objekt im Gleichgewicht hält, geradezu anbieten. Verbindet man etwa zwei gegenüberliegende Ecken mit einer Linie, so ist zunächst leicht zu erkennen, dass die Gesamtfläche gleichmäßig geteilt wird. Das ist der erste, ganz wichtige Punkt zu einer Bewertung. Denn bereits mit einem schmalen Stab, den man von unten entlang dieser Linie ausrichtet, kann man für dieses Rechteck das Gleichgewicht erreichen. Diese Hypothese wird sich später im Experiment bewahrheiten. Daher kann als Merksatz gelten :

Eine die Gesamtfläche gleichmäßig teilende Linie sollte immer darauf untersucht werden, ob sie auch als Gleichgewichtslinie infrage kommt. Dies trifft für das vorliegende Beispiel zu. Und nun der nächste Schritt. Verbindet man beim Rechteck auch das andere Eckenpaar mit einer entsprechenden Linie, so tritt erneut eine gleichmäßige Flächenteilung auf, die zum Gleichgewicht längs einer Linie führt. Darüber hinaus liefert der Kreuzungspunkt dieser beiden „Gleichgewichtslinien“ einen besonderen Punkt.

Denn wird das Rechteck in diesem Kreuzungspunkt von einem schmalen, senkrecht gestellten Stab von unten unterstützt, so verharrt es in diesem Zustand, der das Gleichgewicht beschreibt. Die folgende Abbildung fasst die bisherige Entwicklung zusammen.

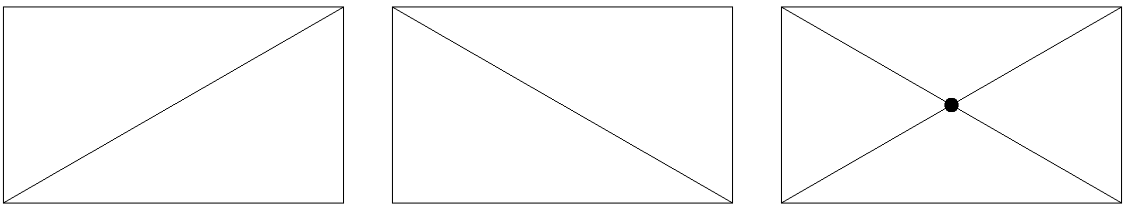


Abb. 1 : Die markantesten Gleichgewichtslinien eines Rechtecks zusammen mit dem resultierenden Gleichgewichtspunkt.

Diese Beschreibungen sollen jetzt in zwei kleinen Experimenten nachgeprüft werden. Benötigt werden dazu eine Schere, ein Lineal, ein spitzer Bleistift und ein schmaler Stab.

Experiment I

Auf einer überreichten Vorlage, DIN A4-Format, befindet sich ein Rechteck mit den Seiten $a = 14{,}0$ cm und $b = 8{,}0$ cm. Trage zunächst sorgfältig die Diagonalen ein und schneide danach entlang der Randlinie aus. Zeige dann mit einem schmalen Stab, dessen Dicke bei ca. $d = 0{,}3$ cm liegen kann, dass die Diagonalen des Rechtecks in der Tat Gleichgewichtslinien sind, da sie das Blatt in der Horizontalen halten können. Bei einem späteren Experiment werden die Anforderungen etwas höher sein.

Experiment II

Zeige, dass der Kreuzungspunkt der Diagonalen das Gleichgewicht markiert. Platziere dazu das Rechteck mit diesem Punkt über das Kopfende eines senkrecht stehenden Stabes und lege vorsichtig ab. Der Aufbau eines geeigneten Haltestabes ist mit den folgenden Hilfsmitteln zu erreichen : benötigt wird ein mit feinem Sand gefülltes Marmeladeglas, in das ein Bleistift (Durchmesser: ca. 0,6 cm und Spitze nach unten) so tief versenkt wird, dass er stabil in senkrechter Stellung stehen bleibt und nach oben ausreichend Platz zum Hantieren lässt. Die senkrechte Stellung ist dabei durch wiederholtes Drehen des Glases zu überprüfen.

Die Gesamtheit aller Gleichgewichtslinien

Die Diagonalen eines Rechtecks sind die auffälligsten Gleichgewichtslinien, die an ihm zu beobachten sind. Es gibt jedoch weitaus mehr. Dazu hat man bei einem Rechteck, auf den gegenüberliegenden Seitenlinien der Länge a eine Teillänge a_1' in der Weise abzutragen, wie dies die Abbildung 2 vorgibt. Es handelt sich um diametrale Punkte.

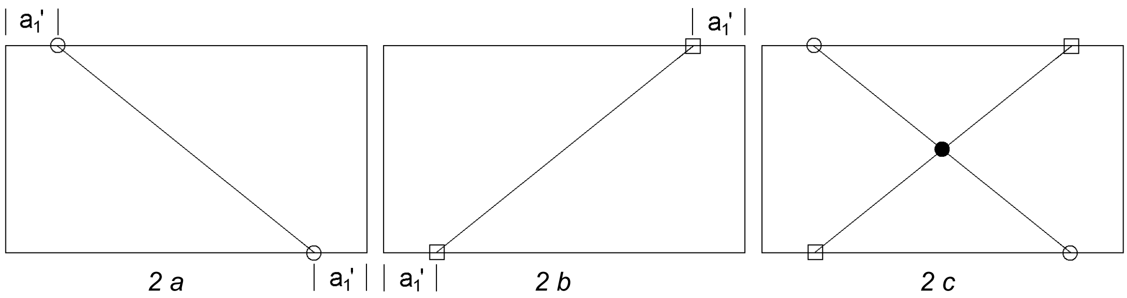


Abb. 2 : Konstruktion weiterer Gleichgewichtslinien an den horizontalen Seitenlinien. Abb. (2 c) zeigt die Zusammenfassung aus (2 a) und (2 b) mit dem bedeutsamen Kreuzungspunkt.

Auch diese Schnittlinien, über die Fläche des Rechtecks hinweg, sind Gleichgewichtslinien, weil sie die Fläche des Rechtecks in gleichgeformte Teile zerlegen. Dieser Sachverhalt ist rein geometrisch begründet und wird mit den Angaben der Abbildung 3 näher erläutert. Denn zeichnet man unter Bezug auf Abbildung 2 a jeweils das Lot in den Endpunkten des Abschnitts a_1' , so ergibt sich das Bild aus Abbildung 3 a .

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

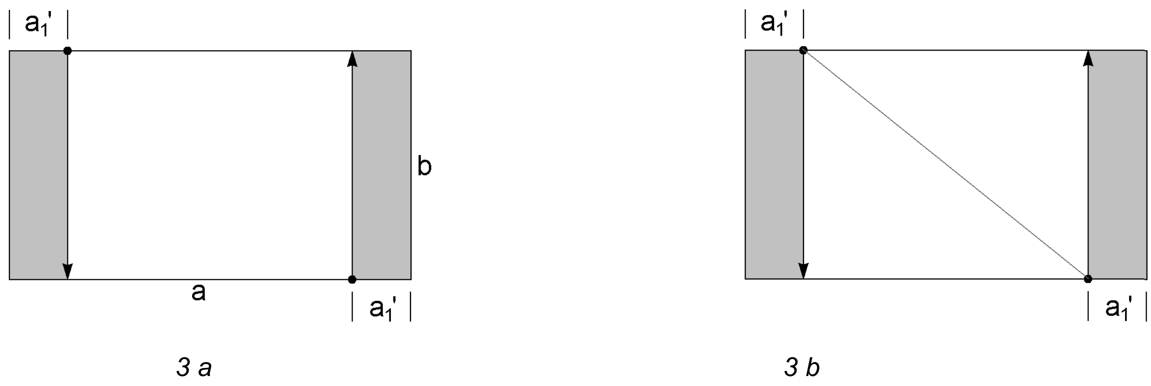


Abb. 3 : Die gleichmäßige Teilung des Rechtecks unter den gegebenen Bedingungen

Auf der linken und rechten Seite sind jeweils zwei identische Rechtecke abgetrennt worden; dabei ist in der Mitte ein weiteres, kleineres Rechteck entstanden. Wird dann in dieses Rechteck eine seiner Diagonalen eingetragen, so ergeben sich auch hier zwei gleiche Flächenanteile. Zusammen mit den beiden äußeren, identischen Rechtecken ergibt sich so auch insgesamt eine gleichmäßige Flächenaufteilung. Sie gilt für das gesamte Rechteck. Damit zählen auch diese Verbindungslinien zu den Gleichgewichtslinien des ursprünglichen Rechtecks.

Experiment III

Auf einer weiteren Vorlage – ebenfalls im Format DIN A4 – ist ein neues Rechteck mit den Abmessungen $a = 14{,}0$ cm und $b = 8{,}0$ cm vorgegeben. Trage wie in Abbildung 3 die Teillänge $a_1' = 4{,}0$ cm ab und zeichne die Verbindungslinie ein. Schneide dann auch dieses Rechteck aus und zeige mit einem geeigneten, schmalen Stab, dass Verbindungslinien, die nach dieser Vorgabe ausgewählt sind, gleichzeitig auch als Gleichgewichtslinien infrage kommen. Zeige, dass der Kreuzungspunkt von zwei verschiedenen Verbindungslinien dieses Typs dann auch den Gleichgewichtspunkt des Rechtecks liefert. Setze dazu einen zweiten Teilabschnitt a_2' nach eigener Wahl ein und überprüfe die bisherige Aussage.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Überlegungen zur Teilung eines Rechtecks

Mit den bisherigen Beschreibungen und Experimenten sind die Eigenschaften, die das Gleichgewicht an einem einfachen Rechteck bestimmen, verlässlich erfasst worden. Welche Schlussfolgerungen erlauben diese Kenntnisse, wenn es darum geht, an einem gegebenen Rechteck erste Veränderungen vorzunehmen? Als Beispiel dazu dient eine Aufteilung, die die Grundform erhält.
Bei einem langestreckten Rechteck ist es für Fragestellungen, die das Gleichgewicht betreffen, ganz sicher von Vorteil, wenn eine vertikale Teilung geplant wird, weil dann die neuen Flächenteile weiterhin die Eigenschaften der Rechteckform besitzen. So lassen sich in den kleineren Rechtecken alle Gleichgewichtslinien und auch die neuen Gleichgewichtspunkte ganz mühelos eintragen. Danach bietet es sich an, das so gewonnene Bild auf seine inneren Zusammenhänge zu untersuchen. Für diese Überlegungen wird im Folgenden von einem Rechteck mit den Seiten a und b ausgegangen, das durch die Relation $a >> b$ optimal vorbereitet ist. Die nächste Abbildung setzt diese Bedingungen besser ins Bild.

Abb. 4 : Gestrecktes Rechteck mit seinen Diagonalen und seinem Gleichgewichtspunkt.

Eine Teilung in zwei nicht gleichwertige Rechtecke mit den Längen a_1 und a_2 ist sowohl allgemein wie auch gut überschaubar. Zur besseren Übersicht sei zusätzlich noch vereinbart : $a_1 > a_2$. In jedem Fall gilt dann:

$$a_1 + a_2 = a \tag{1}$$

Die Abbildung 5 ,unten, zeigt dann links das vorgegebene Rechteck, seinen geometrischen Gleichgewichtspunkt gemäß Abbildung 4 und eine vertikale Teilungslinie t . Auf der rechten Seite sind die Diagonalen der kleineren Rechtecke, ihre zunächst nur formalen Gleichgewichtspunkte und dann nochmals der Gleichgewichtspunkt des ungeteilten Rechtecks eingetragen worden. Ein wichtiges Ergebnis ist bereits hier festzuhalten : Alle markanten Punkte liegen auf einer Linie. Ihr Abstand H zur Grundlinie beträgt einheitlich $H = ½ \cdot b$. Darüber hinaus ist der Abbildung 5 zu entnehmen, dass der Gleichgewichtspunkt des ungeteilten Rechtecks nicht irgendwo sondern zwischen den Gleichgewichtspunkten der kleineren Einheiten

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

liegt und dabei deutlich näher am Gleichgewichtspunkt des größeren Rechtecks zu finden ist. Diese Beobachtung beschreibt keinen Zufall sondern sie hat Methode ! Dies wird im Weiteren deutlich.

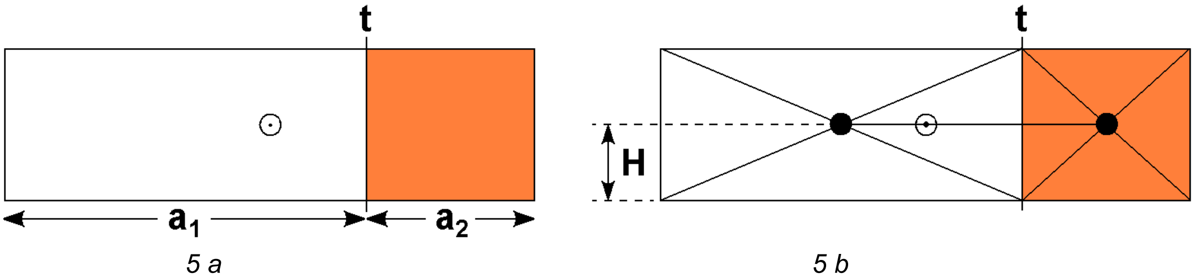


Abb. 5 : *(a) Allgemeines Rechteck mit seinem Gleichgewichtspunkt und einer vertikalen Teilung t*
(b) zeigt die Diagonalen und den jeweiligen Gleichgewichtspunkt der Untereinheit.

Zunächst soll dazu der Abstand G , der die beiden äußeren Gleichgewichtspunkte miteinander verbindet, genauer ermittelt werden. Dieser Abstand genügt nach Abbildung 5 und Gleichung (1) der Bedingung :

$$G = \tfrac{1}{2}\, a_1 + \tfrac{1}{2}\, a_2 = \tfrac{1}{2}\,[\, a_1 + a_2 \,] = \tfrac{1}{2}\, a \qquad (2)$$

Da die Länge a durch eine Teilung nicht verändert wird, ergibt sich eine wichtige Regel.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Ergebnis :

Der Gleichgewichtsabstand G ist unabhängig von der getroffenen Wahl zur Teilung des Rechtecks.

Bei einer so strikten Regel erscheint es sinnvoll, auch nach den Teilabständen x_1 und x_2 zu fragen, siehe dazu Abb. 6. Denn sie sind es, die die Bedingungen für den Fall des Gleichgewichts verbindlich festlegen.

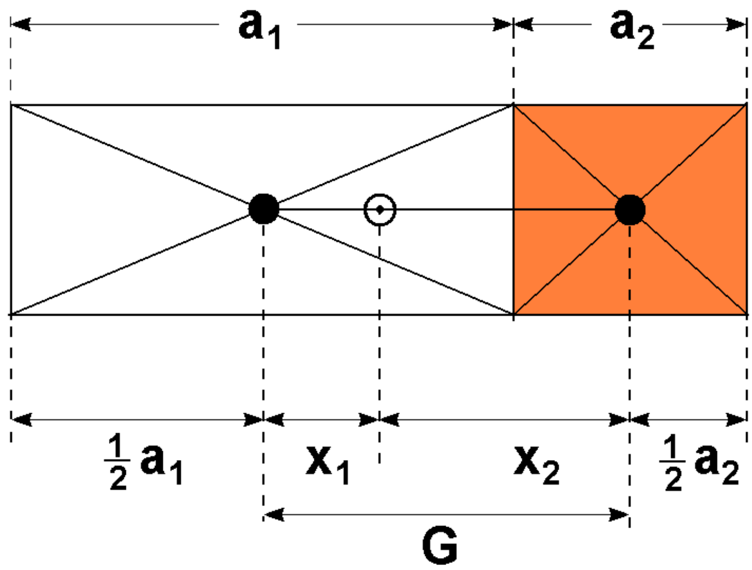


Abb. 6 : Die Lage des Gleichgewichtsabstandes G und der Teilabstände x_1 und x_2 bei Teilung des Rechtecks gemäß der Vorgabe.

Nach Abbildung 6 ergeben sich diese Abstände bereits aus der Geometrie der gewählten Anordnung. Für sie gilt

$\frac{1}{2} a_1 + x_1 = \frac{1}{2} a$ **und** $\frac{1}{2} a_2 + x_2 = \frac{1}{2} a$

Mit den Gleichungen (1) und (2) folgt daraus dann ganz unmittelbar :

$$\boxed{x_1 = \frac{a_2}{a} \cdot G} \qquad \boxed{x_2 = \frac{a_1}{a} \cdot G} \qquad (3)$$

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

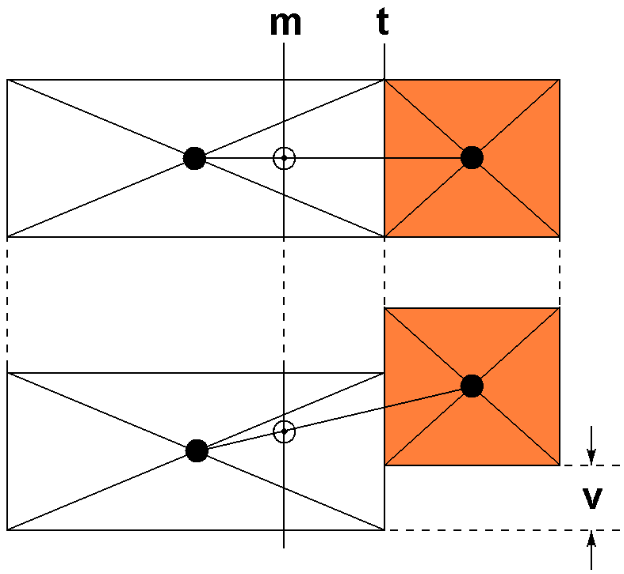
Die beiden Gleichungen sind einander sehr ähnlich. Sie unterscheiden sich nur durch das jeweils andere Längenverhältnis. Ihre Summe führt daher, wie es auch sein soll, wieder zurück auf den Gleichgewichtsabstand G . Denn mit Gleichung (1) folgt sofort :

$$x_1 + x_2 = \frac{a_2 + a_1}{a} \cdot G = \frac{a}{a} \cdot G = G \qquad (4)$$

Nun folgt der Umbau des Rechtecks bei fester Flächenteilung.

Der Umbau des Rechtecks bei fester Flächenteilung

Durch die Gleichung (2) ist deutlich geworden, dass, im Fall einer Teilung, dem Gleichgewichtsabstand G eine herausgehobene Bedeutung zukommt. Die Gleichungen unter (3) führen dies dann näher aus. Interessant ist nun, dass damit Anwendungen in das Blickfeld geraten, die über den bisher gesetzten Rahmen hinausgehen. Dies wird sich im Folgenden zeigen.
Dazu ist zunächst festzustellen, dass die bislang betriebene, formale Aufteilung nicht darauf gerichtet ist, eine Trennung mit Schere und Messer folgen zu lassen. Vielmehr geht es um die Möglichkeit, das Ausgangsrechteck zu verformen und dabei die bindende Linie zu verkürzen, die den Zusammenhalt des Ganzen sichert. Die Einzelheiten ergeben sich aus dem Folgenden.
Um mit einer übersichtlichen Ausgangslage zu beginnen, sollen die bisherigen Ergebnisse in Abbildung 7a nochmals zusammengefasst werden.



7 a

7 b

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Der Umbau des ursprünglichen Rechtecks wird dann durch eine vertikale Verschiebung des Teilrechtecks 2 um die Länge v ausgelöst. Die Abbildung 7 b gibt diesen Vorgang in enger Bindung an Teil a wieder. Hervorzuheben ist die folgende Besonderheit : Diese Aktion verändert nicht die Flächenanteile beiderseits der Mittelsenkrechten m . Daher sollte die Vertikale m , auch nach dieser Verformung, weiterhin als Gleichgewichtslinie des neuen Objektes infrage kommen. Das ist ein äußerst wichtiger aber natürlich auch ein sehr kritischer Punkt. Denn wenn es darüber hinaus richtig bleibt, dass die Verbindungslinie, die die Gleichgewichtspunkte der Teilrechtecke bislang verknüpft hat, auch unter den Bedingungen einer vertikalen Verschiebung noch als Gleichgewichtslinie erhalten bleibt, dann ist damit ein einfaches Konstruktionsprinzip verbunden, das auch den Gleichgewichtspunkt des verformten Rechtecks liefern kann. Er ergibt sich dann nämlich als Kreuzungspunkt dieser neuen Gleichgewichtslinie mit der Mittelsenkrechten m des ursprünglichen Rechtecks. Als geometrischer Ort ist dieser Punkt eindeutig definiert und muss sich, wenn die Natur es so gewollt hat, auch im Experiment als Gleichgewichtspunkt des deformierten Rechtecks bewähren. Dazu die folgenden Experimente.

Experiment IV

Die Gleichgewichtslinien am regulären Rechteck

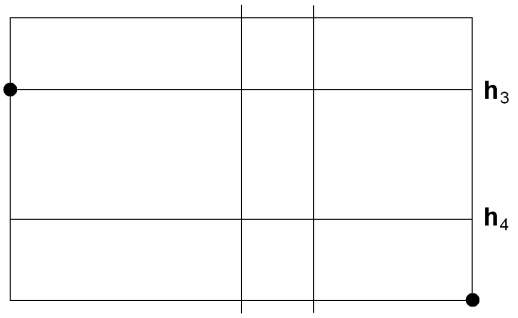
Zeichne auf fester, glatter Pappe ein Rechteck mit den Seiten a = 18,0 cm und b = 8,0 cm . Trage die Diagonalen ein und markiere ihren Schnittpunkt. Trage auch auf den horizontalen Seiten, jeweils in den Endpunkten **einer** Diagonalen, die Länge a_1' = 9,0 cm ab und verbinde die Schnittpunkte; danach ist ein senkrechter Verlauf gegeben ! Schneide dann das Rechteck aus und prüfe mit einem schmalen Stab – Dicke ca. 0,2 cm , z. B. einem Lineal – ob die eingetragenen Verbindungslinien, ohne Ausnahme, Gleichgewichtslinien sind. Prüfe, ob der Schnittpunkt dieser Linien als Gleichgewichtspunkt gelten kann. Im Unterschied zu Experiment I entfallen hier, bedingt durch die höhere Stabilität des Objekts, die früheren Fehler, die sich durch Verbiegen einschleichen.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

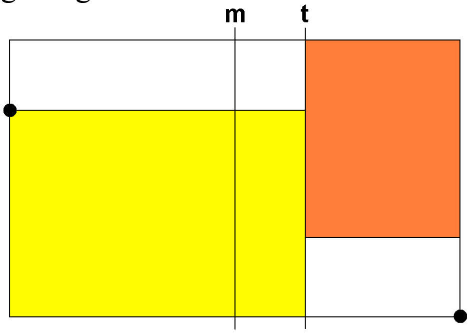
Experiment V

Die Gleichgewichtslinien am deformierten Rechteck

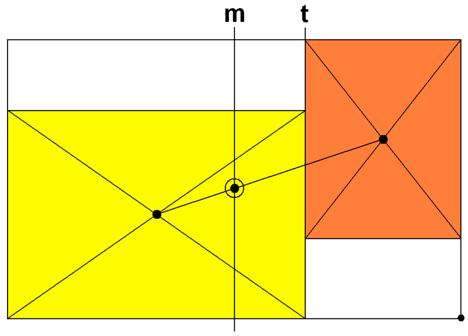
Zeichne auf fester, glatter Pappe ein Rechteck mit den Seiten a = 18,0 cm und b' = 11,0 cm . Trage darin eine dritte Horizontale h_3 bei b = 8,0 cm und eine vierte Horizontale h_4 bei b'' = 3,0 cm ein.



Trage dann an den markierten Punkten (•) – wie in der Skizze oben zu sehen – die Länge a' = 9,0 cm auf den Horizontalen ab und verbinde die Schnittpunkte. Das Ergebnis ist die Mittelsenkrechte m . Lege dann durch eine Vertikale t bei a_1 = 12,0 cm eine Teilung des gesamten Rechtecks fest.

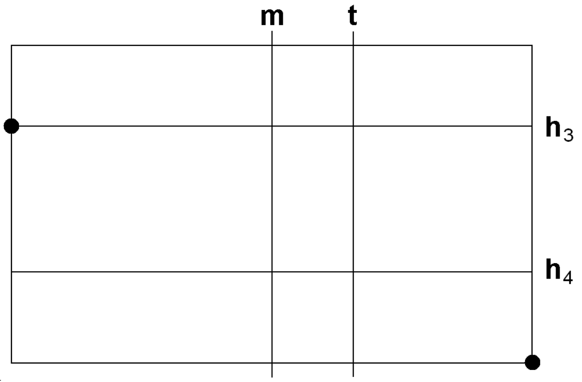


Markiere das hell getönte Feld und trage für das erste Teilrechteck (links) die Diagonalen ein.

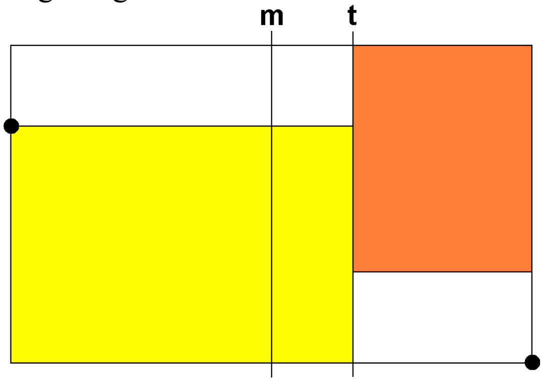


CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Verfahre in gleicher Weise mit dem zweiten Teilrechteck (rechts); jetzt allerdings **nach** seiner vertikalen Verschiebung entlang der Teilungslinie t . Verbinde die Schnittpunkte der Diagonalen und schneide das farbig markierte Feld als Einheit sauber aus. Prüfe unter der veränderten Geometrie die zuvor formulierten Gleichgewich

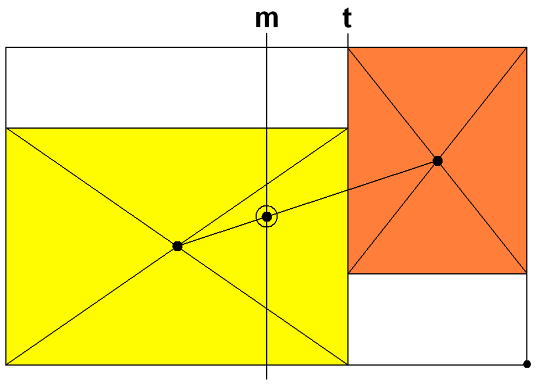


Trage dann an den markierten Punkten (•) – wie in der Skizze oben zu sehen – die Länge $a' = 9{,}0$ cm auf den Horizontalen ab und verbinde die Schnittpunkte. Das Ergebnis ist die Mittelsenkrechte m . Lege dann durch eine Vertikale t bei $a_1 = 12{,}0$ cm eine Teilung des gesamten Rechtecks fest.



Markiere das hell getönte Feld und trage für das erste Teilrechteck (links) die Diagonalen ein.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com



Verfahre in gleicher Weise mit dem zweiten Teilrechteck (rechts); jetzt allerdings **nach** seiner vertikalen Verschiebung entlang der Teilungslinie t . Verbinde die Schnittpunkte der Diagonalen und schneide das farbig markierte Feld als Einheit sauber aus. Prüfe unter der veränderten Geometrie die zuvor formulierten Gleichgewichtsbedingungen. Im Einzelnen sind dies :

Aufgaben

1. Prüfe mit einem Lineal als stützende Auflage, ob die Verbindungslinie zwischen den Kreuzungspunkten der Diagonalen als Gleichgewichtslinie infrage kommt.

2. Prüfe mit einem Lineal als stützende Auflage, ob die Mittellinie m weiterhin als Gleichgewichtslinie infrage kommt.

3. Prüfe mit einem senkrecht stehenden Stift (Ø = 0,6 cm), ob der Schnittpunkt der Linien aus den Aufgaben 1 und 2 den Gleichgewichtspunkt des deformierten Rechtecks beschreibt. Siehe dazu Experiment II.

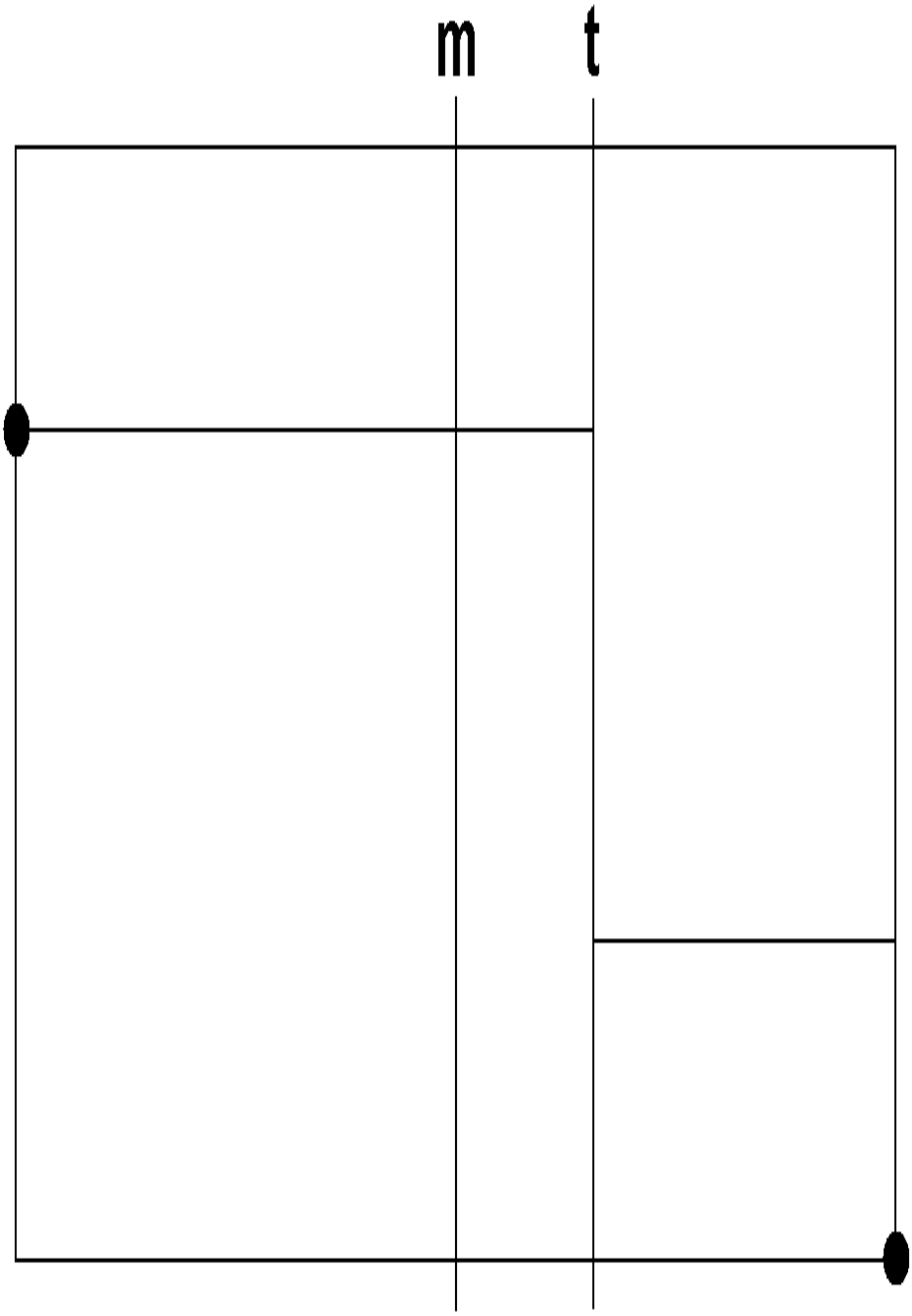
4. Bestimme durch Messung den Gleichgewichtsabstand G des deformierten Rechtecks.

5. Bestimme ebenso durch Messung die Teilabstände x_1 und x_2 und prüfe, ob sie mit den Gleichungen (3) verträglich sind, wenn man den gemessenen Wert für G verwendet.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com

Vorlagen für die Experimente I , II und III

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com



Darstellung um das eigentliche Objekt in seiner tatsächlichen Größe zu veranschaulichen.

CONATEX-DIDACTIC Lehrmittel GmbH – Im Forstgarten 1 - D-66459 Kirkel
Kundenservice (kostenfrei): 00800 0266 2839 (D, CH, A, L) oder 0049 (0) 6849 - 99 269 -0
www.conatex.com - email: didactic@conatex.com