Gyroskop, Komplettset

Lieferumfang

1 kleines Gyroskop
1 kleiner Kreisel
1 Demonstrationsgyroskop mit Zubehör
1 elektromotorischer Antrieb

kleines Gyroskop

kleiner Kreisel

Gyroskop mit Zubehör

elektromotorischer Antrieb

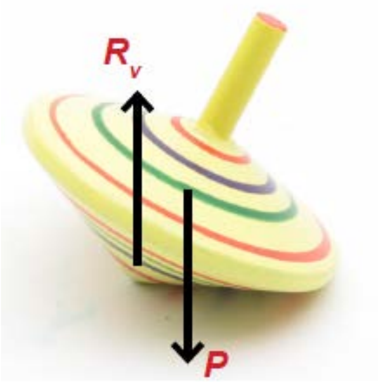
Einführung

Definition Präzessionsbewegung

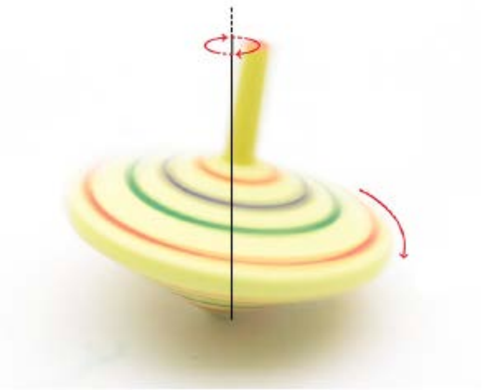
Die Präzession bezeichnet die Richtungsänderung, die die Rotationsachse eines rotierenden Körpers ausführt, wenn eine äußere Kraft ein Drehmoment senkrecht zu dieser Achse ausübt.

Experiment 1

Wenn die Symmetrieachse vollkommen senkrecht zur Ebene steht, wäre das Gleichgewicht des Kreisels in einem instabilen Gleichgerwicht. In der Praxis tritt dieser Zustand jedoch nie auf. Der Kreisel erffährt den Einfluss von zwei Kräften: Die Schwerkraft $\boldsymbol{P}$ und die Auflagekraft $\boldsymbol{R_V}$ im Auflagepunkt. Beide Kräfte sind betragsmäßig gleich, entgegengesetzt und bilden ein Paar. Als Folge kippt der Kreisel.



Wenn sich der Kreisel schnell dreht, fällt er nicht um. Die Drehachse die mit der Symmetrieachse zusammenfällt, ändert die Richtung während ihr oberes Ende einen Kreis beschreibt (Präzessionsbewegung). Nimmt die Drehgeschwindigkeit aufgrund der Reibung ab, erhöht sich die Geschwindigkeit der Präzessionsbewegung so lange, bis der Kreisel kippt.



Experiment 2

Wenn sich das Gyroskop nicht dreht, fällt es aufgrund des mechanischen Moments, das durch sein Gewicht erzeugt wird nach unten. Versetzen Sie nun das Gyroskop mit einer Schnur in schnelle Drehung und setzen es auf das Stativ. Der Kreisel fällt nicht, während der Kreisel sich langsam um seine senkrechte Achse dreht, die durch den Auflagepunkt auf dem Stativ verläuft (Präzessionsbewegung).

Theoretische Betrachtungen : *Rotationsbewegungen mit nicht fester Achse*

1. Impuls

Ein Körper mit der Masse ***m*** bewegt sich mit der Geschwindigkeit ***v***. bei konstanter Geschwindigkeit ist der Impuls ***p*** definiert durch

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v} \qquad (1)$$

2. zweites Newton'sches Gesetz

Das zweite Newton'sche Gesetz besagt, dassdie Kraft ***F*** , die auf einen Körper wirkt proportional zu seiner Masse ***m*** und seiner Beschleunigung ***a*** ist:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

Es gilt

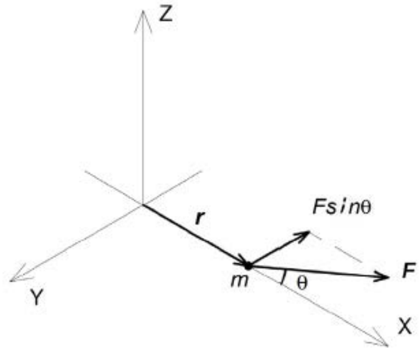
$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t}$$

Somit folgt

$$\mathbf{F} = \frac{d\,\mathbf{p}}{d\,t} \qquad (2)$$

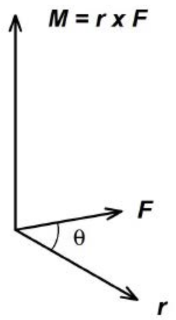
3. **Drehmoment**

An einem Punkt ***P*** eines Körpers wirkt eine Kraft ***F*** . Dessen Richtung im Trägheitssystem ist durch die Richtung ***r*** definiert. Das mechanische Moment (***Drehmomentvektor***) ist durch das folgende Vektor-Produkt charakterisiert:



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (3)$$

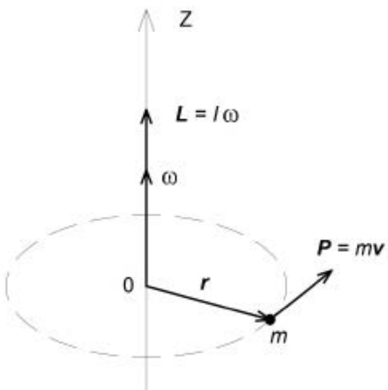
θ ist der Winkel zwischen dem Vektor ***r*** und dem Vektor ***F***. Es gilt, dass das Moment eine Vektorgröße, dessen Betrag ***M = F r sin θ*** ist und dessen Richtung senkrecht zur Ebene steht, die durch die Vektoren ***R*** und ***F*** aufgespannt wird (rechte Hand-Regel). Setzt man Gleichung (2) in (3) ein ergibt sich:



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (4)$$

4. **Drehimpuls einer kreisförmigen Bewegung**

Eine Masse m bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r mit einer konstanten geschwindigkeit v. Die folgende vektorielle Größe wird als Drehimpuls bezeichnet.



$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad (5)$$

für dessen Betrag gilt:

$$L = p\, r \sin \theta$$

Da $\theta = 90°$, gilt $\quad L = pr = mrv$

Durch Multiplikation und Division mir r erhalten wir folgende Gleichung

$$L = m\, r^2 \frac{v}{r} \qquad (6)$$

wir definieren

$$m\, r^2 = I$$ als Trägheitsmoment der Masse

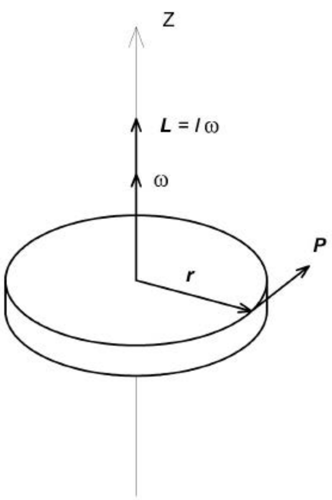
und

$$\frac{v}{r} = \omega$$ als Winkelgeschwindigkeit der Masse

Gleichung (4) in vektorieller Form dargestellt ergibt:

$$\boldsymbol{L} = I\, \boldsymbol{\omega} \qquad (7)$$

Diese Beziehung gilt auch dann, wenn das sich drehende Objekt eine Scheibe ist. In diesem fall ist ***I*** das Trägheitsmoment der Scheibe. Es zeigt die beiden Vektoren ***L*** und ω die gleiche Richtung haben und parallel zur Drehachse stehen.



4. **Die Beziehung zwischen den Vektoren M und L**

Die Geschwindigkeit mit der sich der Drehimpuls ändert ergibt sich durch die Ableitung von Gleichung (5) nach der Zeit.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p})$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{8}$$

Es gelten $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$; Der erste Term ist null (Vektorprodukt zweier

paralleler Vektoren) . Es gilt somit für gleichung (8):

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \tag{9}$$

Aus Gleichung (4) folgt somit unmittelbar

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \tag{10}$$

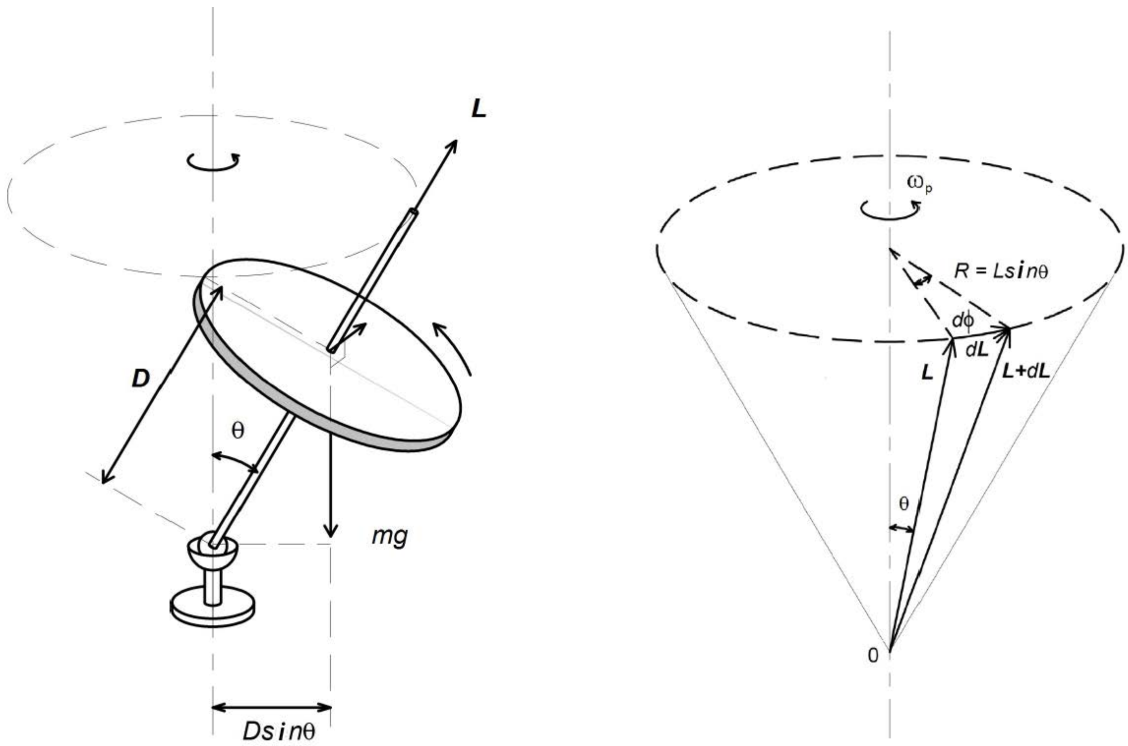
Die bedeutet, dass die Geschwindigkeit, mit der sich der Drehimpuls L zeitlich änder entspricht dem mechanischen Moment M.

Gleichung (10) - abgeleitet von der klassischen Mechanik - beschreibt die ***Winkelgeschwindigkeit*** $\boldsymbol{\omega_p}$ der Präzessionsbewegung.

Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Gyroskop mit einer Präzessionsbewegung. Es ist offensichtlich, dass der Drehimpuls L seiner Rotation entlang der Drehachse zugeordnet ist. Das Gewicht ***mg*** des Gyroskopes übt - bedingt durch die Schwerkraft - ein mechanisches Moment auf den Stativfuß im Punkt ***O*** aus, dessen Btrag ist:

$$M = m\,g\,D \sin \theta \qquad (11)$$



Die obere Spitze der Drehachse beschreibt einen Kreis mit dem Radius ***R*** Es gilt:

$$R = L \sin \theta$$

Innerhalb der Zeit ***dt*** erfährt der Drehimpuls eine Änderung ***dL***. Da diese Änderung sehr gering ist und senkrecht zu ***L*** steht und (10) gilt, folgt

$$dL = M\,dt$$

mit (11) gilt

$$dL = m\,g\,D \sin \theta \qquad (12)$$

Definiert man ***dΦ*** als den durch den Radius ***R*** im Zeitintervall ***dt*** überstrichenen Winkel, so gilt:

$$dL = R\,d\Phi = L \sin \theta\, d\Phi \qquad (13)$$

Aus (12) und (13) ergibt sich folgende Gleichung:

$$L \sin \theta \, d\Phi = m\, g\, D \sin \theta$$

Mit $\omega_p = d\Phi/dt$ gilt

$$\omega_p = \frac{m\, g\, D}{L}$$

Gleichung (7) eingesetzt ergibt

$$\omega_p = \frac{m\, g\, D}{I\, \omega} \qquad (14)$$

Fazit:
Aus dem bisher gesagten kann man schließen, dass sich die Winkelgeschwindigkeit der Präzession umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation verhält.

Gleichung (14) zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung unabhängig von der Neigung der Drehachse ist.

Mit nachfolgendem Versuch können Sie diesen Sachverhalt überprüfen.

Experiment 3

Benutzen Sie eine Schnur um das Gyroskop zu starten. Halten Sie das Gyroskop an der Schlitzschraube fest und setzen es auf das Stativ.
Sie werden feststellen, dass die Winkelgeschwindigkeit der Präzision ω_p unabhängig vom Neigungswinkel der Drehachse ist, selbst wenn man den Kreisel horizontal an eine Schnur befestigt. (siehe nachfolgende Abbildungen).

Lassen Sie den Kreisel für eine feste Zeitspanne (z.B. ***t* = 20 *s***) drehen und zählen die Anzahl der Präzessionsdrehungen. Es gilt folgende Gleichung:

$$\omega_p = 2\pi \frac{n}{t} \qquad (15)$$

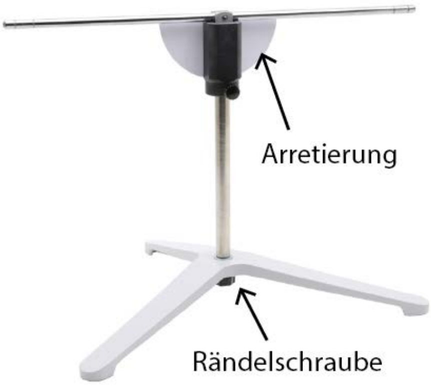
Das Demonstrationsgyroskop

Präzessionsbewegungen lassen sich grundlegend mit dem Demonstrationsgyroskop untersuchen.

Montage des Gyroskops

Schritt 1

Befestigen Sie den Scheibenträger mit der Rändelschraube am Dreifuß und schieben Sie die Arretierung in die höchste Position, so dass sich die Tragachse nicht vertikal bewegen kann. Fixieren Sie dem Anschlag für die Scheibe mit der Imbusschraube in der vorgesehenen Position



Schritt 2

Schieben Sie die kleinere Schwungscheibe rechts auf die Tragachse und blockieren diese mit dem zweiten Anschlag. Befestigen Sie den Anschlag mit der Imbussschraube. Befestigen sie nun auf der Achse vor der Schwungscheibe einen Klips mit Haken. Schieben Sie nun auf die gegenüberliegenden Seite das Ausgleichsgewicht und fixieren es mit der Rändelschraube.

Schritt 3

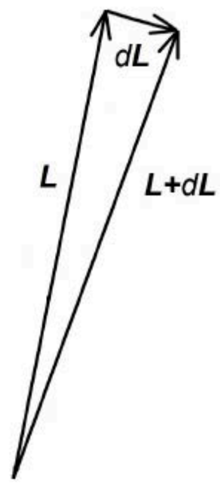
Halten Sie die Drehachse mit der Schwungscheibe fest und lösen die Rändelschraube der Arretierung. Schieben Sie die Arretierung nach unten, so dass sich die Drehachse frei bewegen kann. Verschieben Sie nun das Gegengewicht nach Lösen der Klemmschraube solange, bis sich die Drehachse im Gleichgewicht befindet. Ziehen Sie die Rändelschraube zur Fixierung des Ausgleichsgewichtes wieder handfest an. Die Grundeinstellung des Gyroskopes ist somit beendet.

Experiment 4

Vergewissern Sie sich, dass sich das Gyroskop im Gleichgewicht befindet. Hängen Sie nun ein Hakengewicht von 25 g an den Haken vor der Schwungscheibe. Die Achse wird aus dem Gleichgewicht gebracht, die Tragachse mit der Schwungscheibe kippt nach unten.

Entfernen Sie nun das Massestück und überprüfen, ob sich das System noch im Gleichgewicht befindet. Ist dies der Fall, schieben Sie ddie Arretierung wieder nach oben und blockieren diese mit der Rändelschraube.
Stecken sie nun das Netzgerät in die Steckdose und verbinden es mit dem elektromotorischen Antrieb. Halten Sie das Reibrad an die Schwungscheibe, und versetzen diese in Drehung, wie in der Abb. unten dargestellt. Hängen sie nun das Massestück von 25 g wieder an den Haken und lösen die Arretierung.

Sie sehen, dass sich jetzt die Tragachse nicht senkt. Statt dessen dreht sich das System mit einer Präzessionsbewegung. Grund ist , dass aufgrund der Masse ein mechanisches Moment ***M*** senkrecht zum Drehimpuls ω des Schwungrades wirkt.



Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_p wird durch die Gleichung (14)

$$\omega_p = \frac{m\,g\,D}{I\,\omega}$$

beschrieben, wobei gilt:

- ***M*** ist die Masse des Hakengewichtes
- ***D*** ist der Abstand der Masse auf der Tragachse vom Drehpunkt
- ***I*** ist das Trägheitsmoment des Schwungrades (Wert ist vom Hersteller vorgegeben)
- ω ist die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrades

Experiment 5

Gleichung (14) lässt sich wie folgt verifizieren:

- Verdoppeln Sie die Masse von 25 g auf 50 g und zeigen Sie nach, dass sich ω_p proportional zur Masse ***m*** verhält.
- Verändern Sie den Abstand der Masse vom Drehzentrum. So können Sie zeigen, dass ω_p proportional zu ***D*** ist. Da die Länge des Armes 500 mm beträgt, ergibt sich für

  D = 250 mm – d (d = Abstand der Masse vom Ende Der Tragachse)

- Ersetzen Sie die kleine Schwungscheibe durch die größere Scheibe. Ihr Trägheitsmoment ist ***doppelt so groß*** wie die der kleineren Schwungscheibe. Sie können so zeigen, dass sich ω_p umgekehrt proportional zum zum Trägheitsmoment ***I*** des Schwungrades verhält.

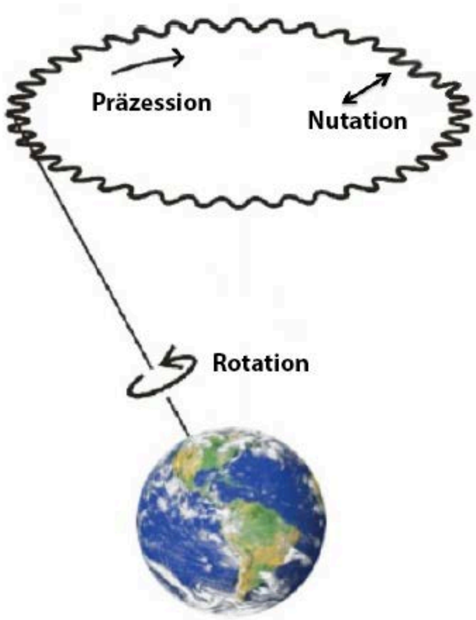
Nutation

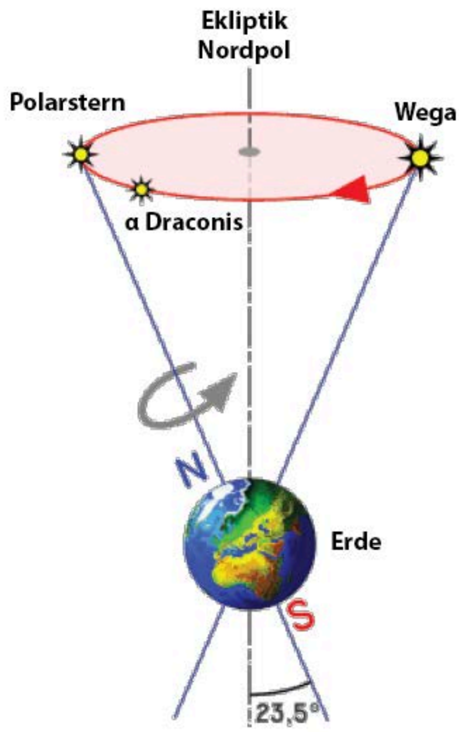
Die Nutation beschreibt die Bewegung eines kräftefreien Kreisels, wenn der Drehimpuls nicht parallel zum minimalen oder maximalen Trägheitsmoments des Kreisels ausgerichtet ist.

Präzessionsbewegung der Erde

Die erde vollzieht eine Präzessionsbewegung aufgrund ihrer Drehung um die Erdachse und der Tatsache, dass der Drehimpuls durch die Schwerkraft der Sonne und des Mondes beeinflusst wird. Dass die Erde durch die Abflachung an den Polen nicht perfekt kugelförmig ist, hat ebenfalls einen (geringen) Einfluss auf diese Bewegung.

Aufgrund der Präzession dreht sich die Erdachse mit einer Neigung von 23° 27’ langsam um die senkrechte Ebene der Erdumlaufbahn.





Hinweis:
Die tatsächliche Ausstattung des Versuchssets kann von der Abbildung in dieser Dokumentation leicht abweichen, da unsere Geräte ständig weiterentwickelt werden.